

Ricardo Aroca Hernández-Ros    Doctor Arquitecto    [www.arocaarquitectos.com](http://www.arocaarquitectos.com)  
C/ Rafael Calvo nº9, 28010 Madrid 914482505    [estudio@arocaarquitectos.com](mailto:estudio@arocaarquitectos.com)

Título    **Cúpulas de fábrica. Un estudio de sus dimensiones y semejanzas.**  
Autores    Santiago Huerta. Ricardo Aroca.  
Medio    Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la ETSAM  
Fecha    0000/00/00

# CUPULAS DE FABRICA. UN ESTUDIO DE SUS DIMENSIONES Y SEMEJANZAS (1)

SANTIAGO HUERTA FERNANDEZ (\*)  
RICARDO AROCA HERNANDEZ-ROS (\*\*)

**RESUMEN.** Un estudio de los antiguos tratados de construcción para el diseño de arcos, bóvedas y cúpulas, revela la persistente presencia en los mismos de reglas que relacionan las proporciones de los mismos. Según la ley de cuadrado-cubo, sin embargo, en estructuras sometidas a su propio peso, los esfuerzos crecen solo linealmente con luz, invalidando estas reglas desde el punto de vista elástico. Un examen más detallado, teniendo en cuenta los problemas de estabilidad, es decir, la posición de las líneas o superficies de confianza, muestra que la condición de estabilidad en estructuras de fábrica es la que determina la geometría total de la estructura. Este exceso de dimensiones hace que, de hecho, la ley del cuadrado-cubo comienza a ser aplicable solamente para grandes luces. El tamaño para el cual el diseño elástico depende de la forma incluye claramente toda la arquitectura histórica. La prueba teórica rigurosa de esta afirmación está implícita en el teorema de Rankine de la proyección paralela tal como se aplica a las estructuras de fábrica. En el presente trabajo se aplican los métodos y conceptos del análisis dimensional.

**ABSTRACT.** *A study of the old master builder's rules for structural design of arches, vaults and domes, reveals a persistent presence of "proportional rules", rules that produce structures geometrically similar. The square-cube law, however, demonstrates that in structures subject to their own weight, stresses grow linearly with size, invalidating these rules from an elastic point of view. A more detailed examination taking into account the problem of stability, i.e. the position of lines or surfaces of thrust, shows that the condition of sufficient stability in masonry structures is what causes an overall geometry for the structure. This excess of dimensions makes that, in fact, the square-cube law begins to apply only to very large spans. The size at which elastic design begins depends on the form of the structure, but for traditional forms, it clearly includes the dimensions of all historical architecture. The rigorous theoretical proof of this argument was implicit in Rankine's theorem of parallel projection as applied to masonry structures. In the present discussion the methods and concepts of Dimensional Analysis have been applied.*

## 1. INTRODUCCION. GALILEO Y EL PRINCIPIO DE SEMEJANZA

El origen de este trabajo es una tesis actualmente en elaboración sobre los tipos de estructuras y las fórmulas estructurales usadas en España para la construcción de bóvedas y cúpulas entre 1500 y 1800 (1). En el desarrollo de este trabajo se ha puesto de manifiesto que los arquitectos y maestros de obra confiaban en las «fórmulas estructurales» para el diseño de las estructuras.

La gran mayoría de estas fórmulas eran proporcionales, es decir, producen formas similares en un sentido geométrico: dan, por ejemplo, el espesor del estribo de

un arco dependiendo de la curva del intrados pero sin tener en cuenta su tamaño. En otras palabras, creían implícitamente en la existencia de una «ley de semejanza»: la validez de una forma estructural continúa siendo válida independientemente de su tamaño.

Sin embargo, Galileo demostró la imposibilidad de la existencia de este tipo de principio (2). El razonamiento es brillante y claro; en estructuras que soporten como carga principal su propio peso, por ejemplo animales y edificios de fábrica, la carga muerta crece con el cubo de las dimensiones, mientras que la sección de los elementos estructurales crece con el cuadrado: la tensión crece así linealmente con el tamaño. La figura 1-a muestra un dibujo de Galileo del efecto de cambio de tamaño del hueso de un animal. El argumento de Galileo ha alcanzado el rango de ley en el diseño estructural «la ley del cuadrado-cubo». Ella ha determinado la actitud de los ingenieros y arquitectos hacia el efecto de escala en el diseño estructural y la de los historiadores

(1) Ponencia del Congreso de IASS, Madrid 1989

(\*) Arquitecto.

(\*\*) Profesor de Diseño Estructural, Universidad Politécnica de Madrid.

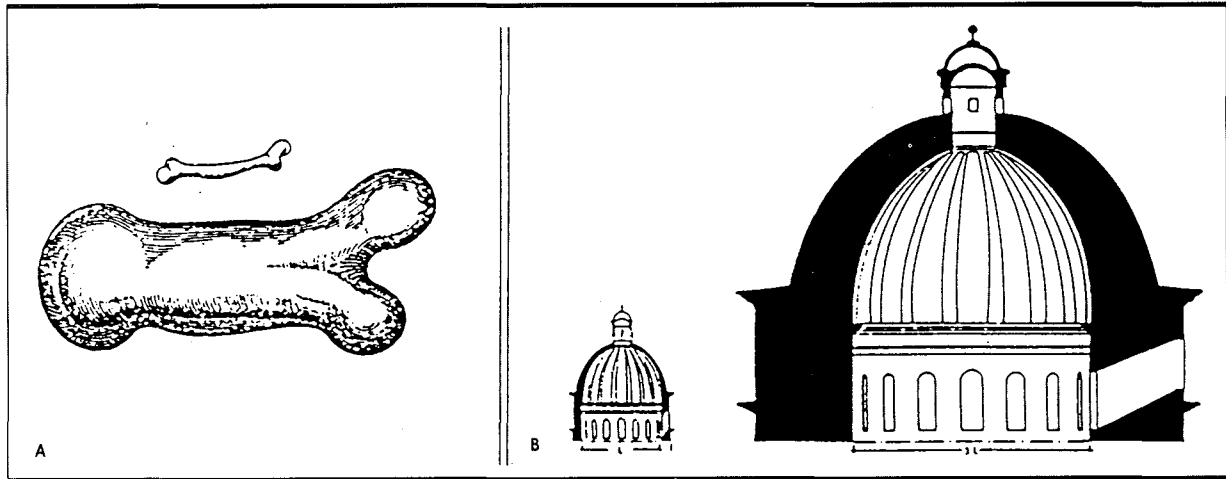


FIGURA 1.

de la ingeniería civil y edificación hacia las reglas proporcionales tradicionales (3).

A pesar de la certeza y claridad de la prueba de Galileo, las estructuras de fábrica tradicionales aparecen como bastante similares, independientemente de su tamaño. En la figura 1 (3) hemos aplicado la ley del cuadrado-cubo de Galileo a la cúpula de la iglesia de Sant Biagio en Montepulciano, Italia, igual que hizo Galileo con un hueso de animal. La cúpula tiene un diámetro interior de 14 metros; si lo multiplicamos por tres obtendremos una cúpula con un diámetro de 42 m. Hemos dibujado a escala esta cúpula con las dimensiones que resultan de aplicar la ley del cuadrado-cubo.

En la figura 2 comparamos las proporciones de la cúpula del mismo tamaño obtenida con el principio de semejanza, (b) con la cúpula obtenida aplicando la ley del cuadrado-cubo y con dos cúpulas que tienen 42 m de diámetro: San Pedro de Roma (c) y Santa María dei Fiore en Florencia (d). Aunque las tres cúpulas no tienen exactamente la misma forma ni tipo de construc-

ción, la ley de semejanza funciona mucho mejor que la del cuadrado-cubo.

El mismo tipo de comparación puede hacerse con otras estructuras de fábrica existentes, como catedrales góticas, cúpulas bizantinas o romanas, etc., con los mismos resultados. en el caso de torres y chimeneas de fábrica aparece de facto una ley inversa y las torres son más delgadas a medida que crecen en altura (véase figura 3) (5).

### 1.1. EL EFECTO DE AUMENTAR Y REDUCIR: EL PRINCIPIO DE SEMEJANZA

Como decíamos antes, Galileo fue el primero en estudiar los efectos de cambio de tamaño en las estructuras. Este tipo de aproximación permaneció casi olvidado durante casi 200 años (6). Al final del siglo XIX este tema comenzó a merecer el interés de ciertos científicos, ingenieros y biólogos, tratando de resolver, mediante el uso de modelos, problemas físicos muy complejos o

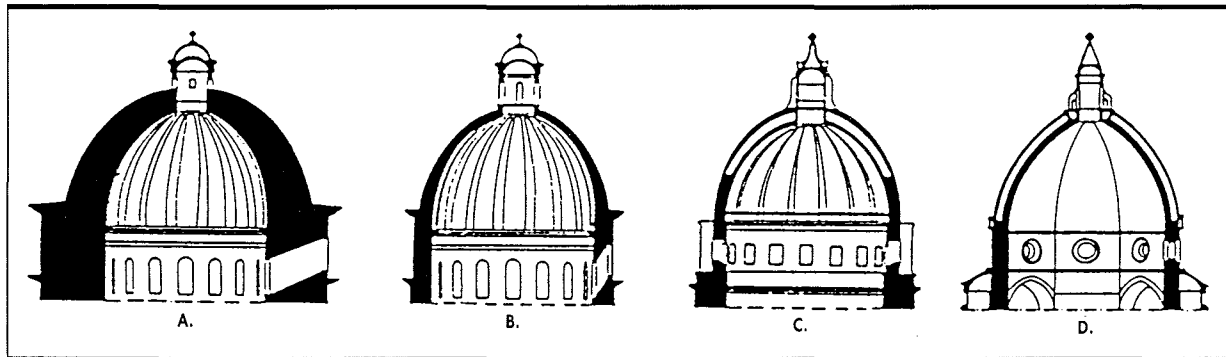


FIGURA 2.

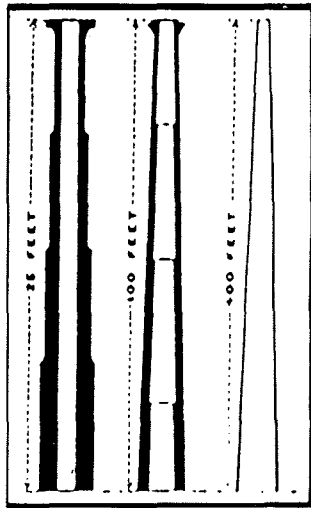


FIGURA 3.

estudiar el efecto del tamaño en la morfología de los animales y plantas. Finalmente, estos estudios y los trabajos de técnicas físicas y matemáticas sobre la homogeneidad de las ecuaciones físicas, condujeron a la creación de una nueva disciplina: el «Análisis dimensional» (7).

Nos topamos aquí con una rama de esta disciplina, «el principio de semejanza». Consiste en aplicar la ley del análisis dimensional para comparar dos sistemas geoméricamente semejantes; en palabras de Lord Rayleigh «la influencia de la escala sobre los fenómenos dinámicos y físicos» (8). La teoría de modelos pertenece a esta rama del análisis dimensional.

El tipo de razonamiento asociado con el principio de semejanza es sumamente potente y permite una rápida extracción de información sobre un fenómeno. Citando otra vez a Lord Rayleigh, «sucede frecuentemente que un simple razonamiento fundado en este principio nos descubre casi todo lo que se ha aprendido incluso con una investigación matemática exitosa» (9).

### 1.2. ESTRUCTURAS SEMEJANTES

El principal campo de aplicación del principio de semejanza es la mecánica de fluidos, transferencias de calor y materia..., y en general cualquier disciplina en la que son necesarios los ensayos con modelos. En estructuras de edificios ha sido aplicado la mayor parte de las veces en el último aspecto, esto es, destinada a casos particulares y no a extraer conclusiones generales de diseño.

Sin embargo, el uso de este principio permite la formulación de conclusiones muy generales para el diseño de estructuras o deducir nuevas soluciones de las ya existentes. Las contribuciones en este sentido son muy escasas.

El primer exponente de esta aproximación es Rankine, quien en su «Manual de Mecánica aplicada» extrae un «método de la proyección paralela» que le permite sacar conclusiones sobre una cierta estructura de su proyección en un plano dado. Aplica este método a los

cables colgantes, estructuras poligonales y estructuras de fábrica. Más tarde discutiremos las consecuencias de la aplicación del método a arcos y bóvedas de fábrica. También a través de su obra hay frecuentes observaciones sobre el efecto de los cambios de tamaño. Debemos citar en este mismo sentido las obras de Thomson (10) y Barr (11).

En el resto del artículo se hace un estudio sobre el efecto del aumento de tamaño y su reducción en la estabilidad de arcos, bóvedas y cúpulas, empleando el método y razonamiento derivados del principio de semejanza y haciendo algunas reflexiones sobre la posibilidad de deducir algún tipo de regla de seguridad proporcional. Estas consideraciones deberían arrojar nueva luz en el diseño estructural e interpretación histórica de las estructuras de fábrica (12).

## 2. ARCOS DE FABRICA

Consideremos primeramente el caso de arcos de fábrica y lo utilizaremos más adelante en el estudio de las cúpulas. Supongamos que tenemos un arco de fábrica sometido a su propio peso y definido de tal forma que podamos aumentarlo y reducirlo, por ejemplo, por una cierta línea media y con una ley de variación del grosor. Si el arco ha de ser seguro se deben cumplir ciertas condiciones con respecto a la resistencia, elasticidad y estabilidad.

La primera, que corresponde a la aplicación de la teoría elástica, impone que el material no debe alcanzar un cierto nivel de esfuerzo considerado «inseguro» y no admisible.

La segunda condición, que corresponde a la aplicación del análisis último, impone ciertas restricciones a la posición de la línea de empuje. Debido a la incapacidad de las fábricas para resistir tracciones, un arco será estable, para un sistema de cargas dado, si al menos se puede encontrar una línea de empuje situada dentro de la fábrica (13). Esto produce un límite inferior para el grueso del arco, esto es una «forma límite» para un sistema de cargas dado (véase fig. 4-a). Podemos ahora fijar esta forma límite del arco empleando un «factor forma» o parámetro no-dimensional. Como este es el estado límite de equilibrio alcanzamos un cierto grado de seguridad, de hecho hacemos el arco más estable, haciendo que la línea de empuje se separe suficientemente de las líneas que limitan el arco. Podemos aplicar, pues, un «coeficiente de seguridad geométrico» estableciendo que la línea de empuje pasara siempre dentro de una fracción de la sección, sea  $1/3$  ó  $1/4$  (véase fig. 4-c).

Las dos condiciones mencionadas antes se deben cumplir al mismo tiempo en todos los arcos. Estudiaremos primeramente el caso de carga muerta solamente y después examinaremos el efecto de sobrecargas.

### 2.1. CARGA MUERTA

En el caso de carga muerta exclusivamente, la posición de la línea de empuje viene determinada por la forma

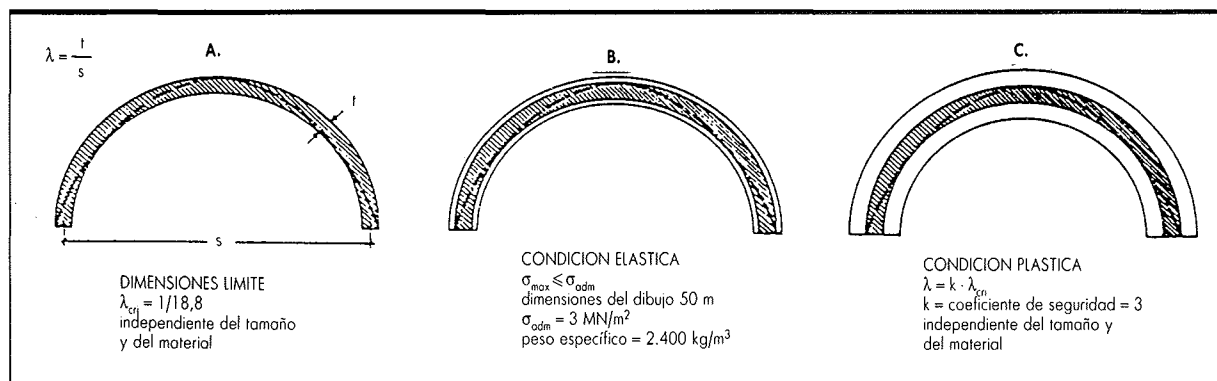


FIGURA 4.

geométrica de la estructura y por eso su forma límite es independiente de la escala. La aplicación de un coeficiente de seguridad geométrico da lugar a una forma similar. Sin embargo, con respecto a la resistencia, el crecimiento del grosor es una función lineal de las dimensiones.

Es mejor ver el efecto de ambos factores por medio de un ejemplo. Supongamos que tenemos un arco de grosor constante, y una cierta forma y que conocemos su forma límite. En este caso se puede representar por un solo factor de forma la razón grosor ( $g/e$ ) que puede llamarse «esbeltez del arco».

Tomamos este «arco límite» como un punto de partida para el diseño. Para un cierto valor de la luz la condición elástica impone un incremento del grosor para alcanzar el valor de la tensión admisible en el punto de mayor tensión (fig. 4-2). Si dibujamos una curva relacionando la esbeltez del arco con la luz, obtenemos la curva E de la figura 5, mostrando un crecimiento del grosor con el crecimiento de la luz.

En la condición última o plástica, el coeficiente de seguridad geométrico mencionado antes, produce una

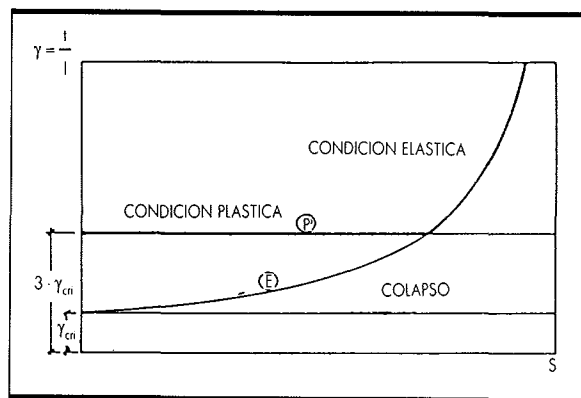


FIGURA 5.

línea recta horizontal P (fig. 5). El campo de seguridad de diseño se sitúa sobre estas dos líneas. El punto de intersección representa la dimensión en la cual el diseño plástico deja de ser crítico.

Este punto marca el rango de dimensiones para la validez de las reglas proporcionales para el diseño de arcos. Su posición depende de la forma del arco y del peso específico y tensión admisible de la fábrica.

En la figura 6 representamos la misma curva para dos de los arcos más comunes de fábrica: un arco semicircular aislado y otro «relleno» hasta el nivel de la clave. El límite de esbeltez es para el primero de 1/18,8 y para el segundo 1/44, y aplicando un coeficiente de seguridad 1/6 y 1/14. Esta línea horizontal corta las correspondientes curvas de diseño elástico en valores de la luz de 82 y 106 m, respectivamente (Tensión admisible = 3 MN/m<sup>2</sup>, peso específico de la fábrica 2,2 g/cm<sup>3</sup>, peso específico del «relleno» 1,8 g/cm<sup>3</sup>) (15). Como la tensión crece linealmente con las dimensiones, estos resultados pueden ser extrapolados fácilmente para otras tensiones admisibles.

Como puede verse fácilmente el punto crítico está muy por encima de las dimensiones de cualquier estructura de fábrica construida con esta forma. Los mayores arcos semicirculares construidos están bajo los 60 metros de luz (16).

El mismo tipo de consideraciones se puede hacer para otros tipos de arcos tradicionales (ojival, elíptico, etcétera) que encontramos en la historia de la arquitectura. En general, la forma impuesta por estabilidad, produce un bajo nivel de tensiones para un rango de dimensiones que comprende fácilmente toda la arquitectura del pasado.

Por eso, para estructuras sometidas solamente a la carga muerta, o donde ésta es la carga más significativa, como por ejemplo las bóvedas de fábrica de iglesias y catedrales, el uso de reglas proporcionales, es decir, parámetros de forma no-dimensionales, es un método de diseño racional y seguro.

La forma más fácil para especificar este parámetro

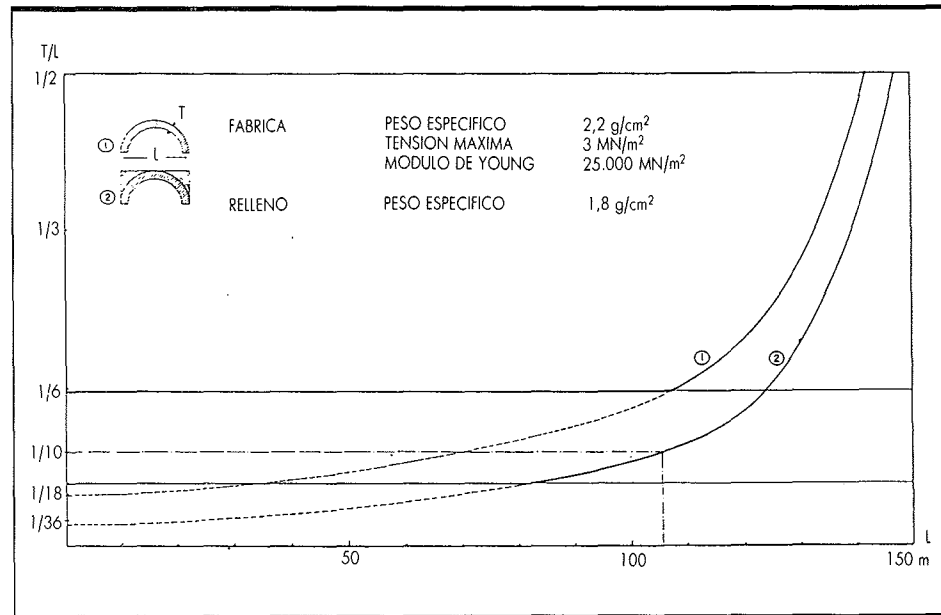


FIGURA 6.

de forma para un sistema de estructuras semejantes, es dar una serie de fracciones. Esto es precisamente lo que hicieron los maestros de obra tradicionales. Los maestros de obra góticos expresaron de esta forma la razón, grueso/luz para los nervios de las bóvedas de crucería (17) y este tipo de reglas para el diseño de arcos y bóvedas, ha sido usado hasta este siglo. (Pueden encontrarse en muchos manuales de ingeniería y construcción.)

**2.2. CARGAS VARIABLES**

Ahora consideraremos la acción de una carga puntual *P* que puede situarse en cualquier punto del arco. En este caso, podemos obtener para un cierto valor y posición de *P* y para un cierto valor de la luz, un límite de esbeltez del arco y llamaremos a *P* carga crítica. Si cambiamos la posición de *P* obtenemos una serie de valores del límite de esbeltez, el máximo de los cuales representa el límite de esbeltez para una carga crítica *P* y una luz *l*.

Esta esbeltez será mayor que el valor correspondiente a la carga muerta y por eso debemos incrementar a su vez el grueso del arco, aplicando el factor geométrico.

¿Cómo cambia la carga crítica *P* en estructuras semejantes? Para estudiar la variación de la carga crítica *P* para un arco dado en relación con la luz, podemos usar el método de las dimensiones con gran provecho. Las variables que entran en el problema son: la carga puntual *P*, la luz del arco *l*, y el peso específico de la fábrica  $\mu$  (suponiendo el arco y el «relleno» del mismo material). El análisis dimensional da la siguiente ecuación (18):

$$P = \mu l^2 \Phi (W_i, W_j, \dots)$$

donde  $\Phi$  es una función de  $W_i, W_j, \dots$  factores de forma derivados de la geometría del arco y de la posición de las cargas. Hemos supuesto que *P* es una fuerza ac-

tuando por unidad de longitud perpendicular al plano del arco. Si *P* es una carga habitual será proporcional a  $l^3$ .

En dos arcos semejantes de diferente material:

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mu i^2}{\mu' l'^2}$$

Si son del mismo material:

$$\frac{P}{P'} = \frac{l^2}{l'^2}$$

En el primer caso la carga puntual crítica es proporcional al peso específico y al cuadrado de las dimensiones, esto es, al peso del arco (consideramos una sección entre dos planos paralelos). En el segundo caso la carga puntual crítica es proporcional al cuadrado de la razón de semejanza.

Aunque el análisis dimensional no dice nada sobre la forma de la función  $\Phi$  el resultado es importante, porque permite extrapolar fácilmente un caso particular. Es simple obtener el valor de  $\Phi$  para un caso dado:

$$\Phi (W_i, W_j, \dots) = \frac{P_1}{\mu_1 l_1^2}$$

y después podemos obtener el valor para cualquier estructura semejante de cualquier material  $\mu$  y luz (*l*).

Es evidente por la forma de la ecuación que, cada par de valores ( $\Phi, P$ ), (*P, l*) o ( $\Phi, l$ ), define el que falta. Es decir, para cualquier dimensión y valor de *P* dados, existe una esbeltez crítica. Para ver la variación, un cierto caso, en la figura 7 hemos dibujado los resultados para un arco semicircular de espesor constante con una carga *P* aplicada en la clave.

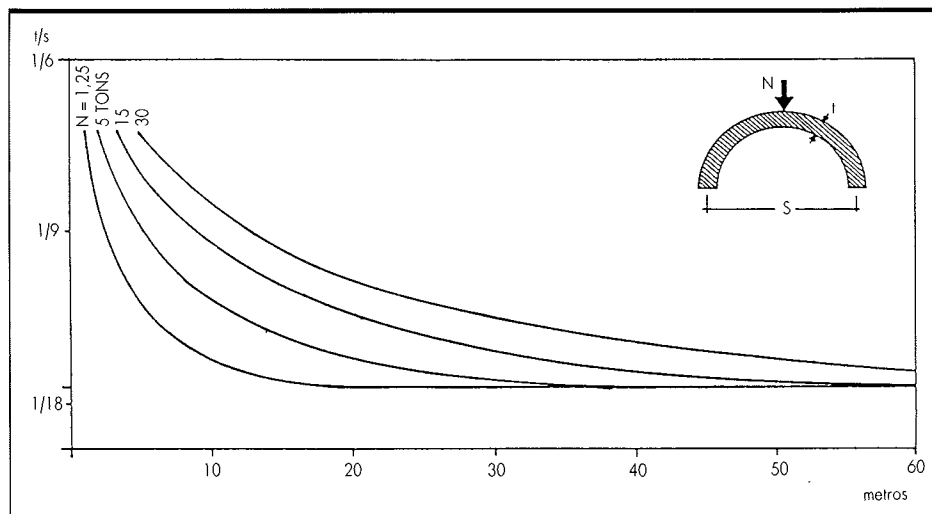


FIGURA 7.

Podemos hacer ahora algunas consideraciones sobre los efectos de los cambios de tamaño en estructuras semejantes con cargas variables.

En estructuras semejantes del mismo material, para tener el mismo grado de estabilidad,  $P$  debe variar con el inverso del cuadrado de la razón de semejanza.

Sin embargo, en la práctica normal, este no es el caso y el valor de  $P$  se fija en función del emplazamiento y uso de la estructura. Podemos considerar pues  $P$  como una constante. En este caso, es fácil ver que si tenemos un arco estable, cualquier arco semejante de mayor tamaño, sometido al mismo sistema de cargas, será «más estable» porque la línea de empuje podría desviarse mucho menos de su línea central.

De hecho desde el punto de vista de la estabilidad cuanto mayor es el arco, más fino puede hacerse. Este tipo de «ley inversa» se aplica también en el caso de torres de fábrica sometidas al viento (véase figura 3). La única exigencia sería asegurar que el nivel de tensiones no crece por encima del nivel de tensión admisible del material. Actualmente, las reglas empíricas usadas en el diseño de puentes, dan todas para arcos semejantes, un espesor decreciente en la coronación. En la figura 8 hemos representado las bien conocidas fórmulas de Perronet, Croizette-Desnoyers y Dupuit (20). Hemos representado también la regla dada por Martínez de Aranda (21), un arquitecto español del siglo XVI en su manual de estereotomía. La regla es aplicada solamente a arcos de un cierto rango de dimensiones.

Por el contrario, un arco de menores dimensiones podría necesitar una verificación completa de su estabilidad. Sin embargo, si conocemos la carga crítica de un arco original podemos calcular inmediatamente la carga crítica del nuevo arco. En el caso de esperar que las dos cargas puntuales no sean iguales esta verificación a veces sería suficiente. En este caso no es necesario examinar las tensiones.

Esto parece invalidar las reglas proporcionales para el caso en que las cargas puntuales sean significativas como es el caso de los puentes, si podemos encontrar una solución única para cada luz. De hecho será válido si representan un límite superior de la esbeltez para la carga más favorable. Este es el caso en la mayoría de los casos con la esbeltez de los puentes Romanos y del Renacimiento, comprendidos típicamente entre  $1/8$  y  $1/12$  de la luz.

La figura 9 representa la regla el Alberti para puentes tal y como es representada por Straub (22). Tal vez el acercamiento más racional y que puede permitir aprovecharse del uso de formas semejantes, es el de Martínez de Aranda, usado también por Gauthey, definiendo razones simples para ciertos intervalos de dimensiones.

### 2.3. TAMAÑO LIMITE

El tamaño límite de un arco de fábrica depende de la tensión admisible y el peso específico del material y de la forma del arco. Aplicando otra vez el análisis dimensional obtenemos:

$$\sigma_{max} = \Phi (W_1, W_2, \dots) \mu l$$

donde  $\sigma_{max}$  es la tensión máxima,  $\mu$  es el peso específico del material,  $l$  es la luz y  $(W_1, W_2, \dots)$  es una función del factor de forma. El valor de  $\Phi$  puede usarse para medir la eficiencia de un arco de gravedad.

La cuestión de hasta qué tamaño puede llegar un arco de fábrica, ha preocupado a los ingenieros desde el comienzo del análisis estructural. Destacamos ingenieros como Perronet (23), Dupuit, Sejourné (24) y Freysinét (25), dedicaron en la tabla 1 (26) aparecen los mayores arcos de fábrica del mundo, con indicación, donde es posible, del máximo nivel de tensión alcanzado.

Merece ser subrayado el Puente sobre el río Adda en Trezzo, Italia, con una luz libre de 72 m. Otro puente no

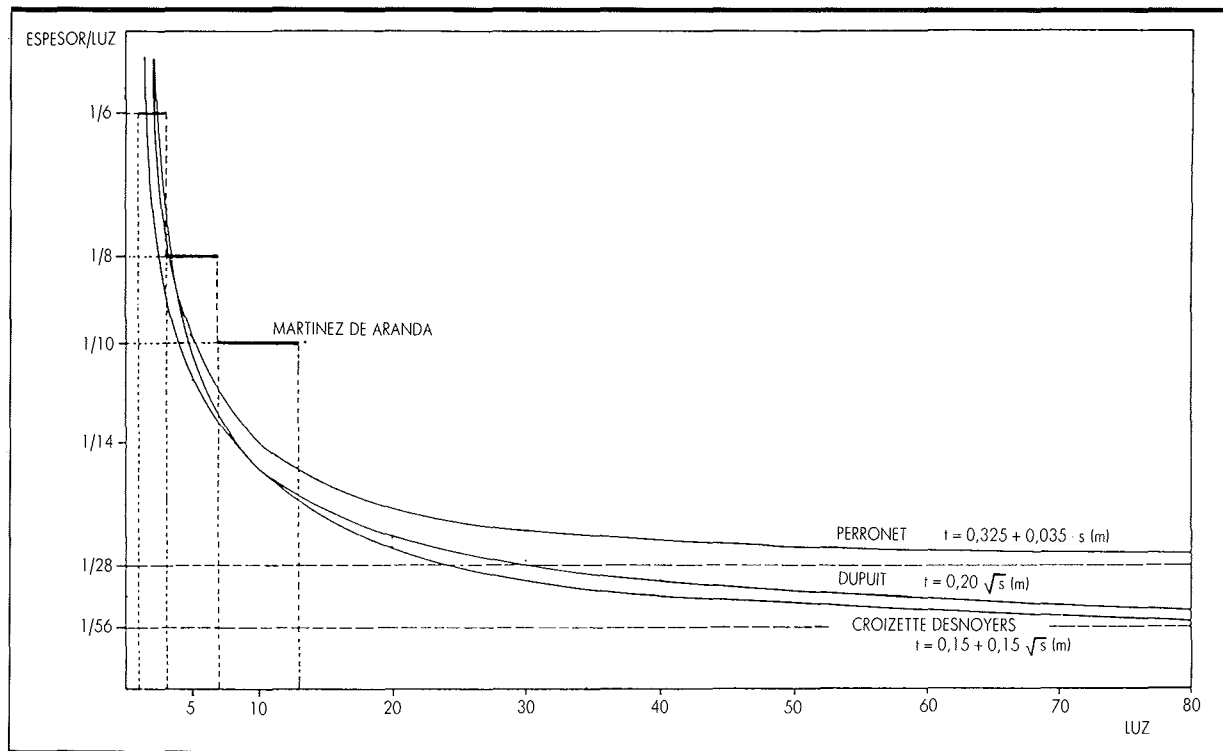


FIGURA 8.

incluido en la tabla debe ser mencionado. Leonardo proyectó un puente para el Sultan Bajezid II sobre el Cuerno de Oro en Estambul con una luz de 240 m. Lo que queda de este proyecto son solamente unos dibujos, pero la forma del puente está claramente definida y permitió a Stüssi (27) un análisis de su estabilidad y resistencia. Concluyó que el proyecto era factible, siendo el puente estable y presentando una tensión máxima de 9 MN/m<sup>2</sup> en los arranques.

El mayor puente proyectado en época moderna en hormigón en masa, el Viaducto de Bernand, fue proyec-

tado por Freyssinet con una luz de 190 m, pero no se construyó por el estallido de la I Guerra Mundial.

Estos gigantescos puentes parecen establecer el límite para los puentes de fábrica. Freyssinet sin embargo creía firmemente en la posibilidad de construir puentes de arco de más de 1 Km de luz; fija el límite en los 2 km (28).

Por lo que sabemos, el mayor arco es el Puente Gladenville, en Australia, construido en hormigón armado, con una luz de 1000 pies (305 m) y con una tensión máxima de 14 MN/m<sup>2</sup> (29).

#### 2.4. TEOREMA DE RANKINE DE LA PROYECCION PARALELA

Hasta ahora hemos hablado de estructuras semejantes. La semejanza de la que hemos hablado es un caso particular de una relación geométrica más general entre figuras: la proyección paralela. Como se ha dicho antes, este caso general fue estudiado por Rankine, que enunció un «método de la proyección paralela».

Dos figuras son una proyección paralela de la otra si entre ellas existe una relación tal que a cada punto de una corresponde un punto de la otra y a cada sistema de dos líneas iguales paralelas corresponde en la otra otro sistema de dos líneas iguales paralelas.

Rankine representa la proyección paralela por su expresión matemática. Dada una figura definida por sus coordenadas respecto a ciertos ejes  $x, y, z$  rectangulares

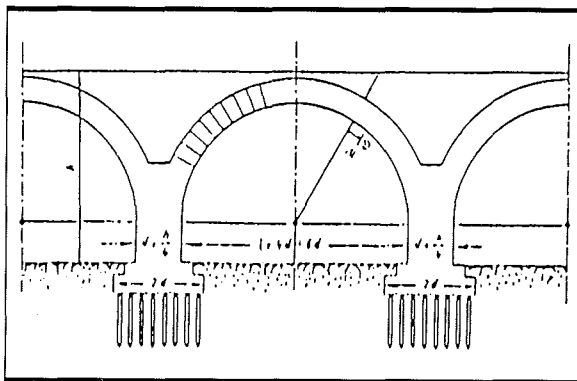


FIGURA 9.



MAYORES ARCOS DE FABRICA	LUZ (m)	TENSION MAXIMA (MN/m <sup>2</sup> )
PUENTE DE WALNOT-LANE (USA 1906-9)	71	2,7
PUENTE SOBRE EL ADDA TREZZO (ITALIA S. XIV)	72	—
PUENTE DE MONTANGES (FRANCIA 1908-9)	80	5,0
PUENTE DE SALCANO (AUSTRIA 1904-5)	85	5,1
PUENTE DE LUXEMBURGO (LUX. 1895-1903)	85	4,8
PUENTE SOBRE EL RIO ROCKY (USA 1908-10)	85	4,4
PUENTE DE PLAUEN (ALEMANIA 1903-50)	90	6,9
PUENTE DE VILLENEUVE (FRANCIA 1914-1915)	93	5,7
PUENTE DE BERNAND (FRANCIA. PROYECTO 1913)	165	8,1

TABLA 1.

u oblicuos, una segunda figura definida respecto a otros ejes  $x', y', z'$  es una proyección paralela de la primera, si entre cualquier pareja de puntos correspondientes, sus coordenadas cumplen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x'}{x} = a, \frac{y'}{y} = b, \frac{z'}{z} = c$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes. Más adelante daremos una interpretación geométrica más simple para figuras planas.

Las proyecciones paralelas de figuras planas y espaciales tiene una serie de propiedades geométricas (30). Esto permite sacar conclusiones como la variación de longitudes, superficies y volúmenes y sus divisiones y centro de gravedad. Se puede aplicar también a la transformación de sistemas de fuerzas en equilibrio. En este último aspecto, Rankine enunció el siguiente teorema: «si un sistema equilibrado de fuerzas sobre un sistema de puntos, es representado por un sistema de líneas, una proyección paralela de este sistema de líneas constituirá un sistema equilibrado de fuerzas» (31).

Rankine lo aplica a estudiar los efectos de los cambios y forma en el equilibrio de estructuras articuladas, arcos lineales y estructuras de fábrica. Estos estudios sobre transformaciones de estructuras condujeron a la formulación por Maxwell del teorema de las «figuras recíprocas» (32).

Con respecto a los arcos de fábrica enunció un teorema sobre la estabilidad de «las transformaciones de construcciones formadas por bloques». Este teorema establece que si una construcción formada por bloques y sometida a la acción de un sistema de cargas representado por líneas, cumple la condición de estabilidad, cualquier proyección paralela tendrá el mismo grado de estabilidad, supuesto que las cargas son la proyección paralela de las cargas originales.

Esto significa que la posición relativa de la línea de

empujes respecto a las líneas del trasdos y del intrados será la misma. Esto representa la posibilidad de obtener, dado un arco estable para un sistema de cargas, un número infinito de arcos estables (33).

Hemos enunciado antes la definición matemática de una proyección paralela. Para una figura plana es fácil encontrar una interpretación geométrica simple: dada una figura referida a dos ejes  $x, y$ , que forman un ángulo  $\Phi$ , cualquier proyección paralela se puede reducir a la combinación de tres transformaciones básicas: ampliación o reducción en la dirección de cada uno de los ejes y variación del ángulo  $\Phi$  entre ellos. En la figura 10 hemos representado estas transformaciones básicas y algu-

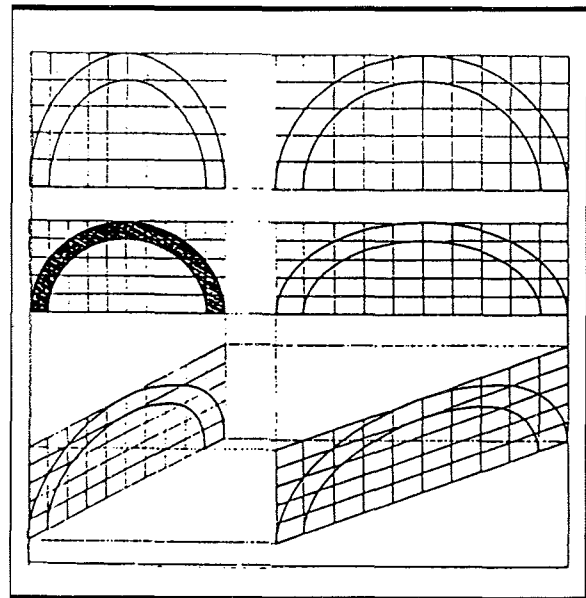


FIGURA 10. Proyección paralela de arcos.

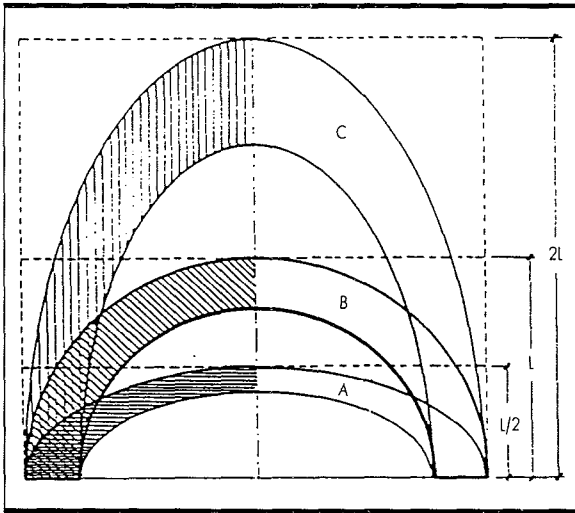


FIGURA 11.

nas combinaciones de ellas. Como el arco original es estable, cualquier proyección tiene el mismo grado de estabilidad.

El teorema es muy potente y permite la solución rápida de algunos problemas prácticos, cómo adecuar la forma del arco a una relación dada entre altura y luz, o producir un arco asimétrico con sus arranques a diferente nivel. Por ejemplo, los tres arcos representados en la figura 11 producen el mismo empuje horizontal. Sin embargo el arco A contiene la mitad del material que el arco B, y el C el doble. Las tensiones están en una proporción inversa y es doble en A y la mitad en C, tomando como referencia el arco B.

Otro ejemplo se muestra en la figura 12 donde todos los arcos con timpanos presentan el mismo grado de estabilidad.

Por supuesto las tensiones cambiarán y un pequeño cálculo debería hacerse si las tensiones en el arco original están cerca del límite admisible, o si hacemos un amplio cambio de tamaño. Se pueden obtener fórmulas matemáticas para calcular el incremento de tensiones y

Rankine da una (3), pero sería más simple y da menos errores obtenerlos graficamente.

### 3. CUPULAS DE FABRICA

Las más importantes diferencias entre un arco y una cúpula de dóvelas es que mientras que en el arco solamente consideramos los esfuerzos en dos secciones radiales, en las cúpulas las dóvelas están sujetas a tensión en sus cuatro caras. Esto hace a las cúpulas más estables y permite, por ejemplo, quitar la clave y abrir un «ojo» sin que colapse.

Si todas las tensiones fuesen compresiones no existiría problema en absoluto y es así en la mayor parte de las cúpulas. Pero en anillos de un cierto ángulo aparecen tracciones que la fábrica no está preparada para resistir. El ángulo al que ocurre esto depende de la forma de la cúpula y del sistema de cargas aplicado. En una cúpula semicircular de grueso constante aparecen tracciones en un ángulo  $\alpha = 51,8^\circ$  de la parte superior. La linterna o incluso un «ojo» hace que la zona de tracciones suba hacia la cumbre.

Debido a este fenómeno y a la incapacidad de las fábricas para resistir tracciones, el problema de las cúpulas de fábrica se puede reducir al de un arco: la cúpula bajo el punto de esfuerzo nulo se abre en fragmentos en forma de gajos, que actúan como una serie de arcos radiales. Esto ha sido la aproximación tradicional (35) al estudio de las cúpulas de fábrica y ha sido resucitado recientemente por Heyman (36).

Sin embargo una cúpula puede romperse en líneas radiales cerca de la parte baja, los antiguos maestros de obras eran conocedores de este hecho y por ejemplo en la cúpula de Santa Sofía, como ha indicado acertadamente Dum (37), el arquitecto conociendo este efecto creó ventanas alrededor de la base, de tal forma que esta parte de la construcción está formada por 44 arcos radiales aislados (38).

#### 3.1. DIMENSIONES LIMITE DE LAS CUPULAS

La misma observación hecha para los arcos es válido para las cúpulas. Una cúpula, sin embargo, debe presentar, para ser estable, una cierta forma límite. Como la distribución de cargas es más favorable en la cúpula,

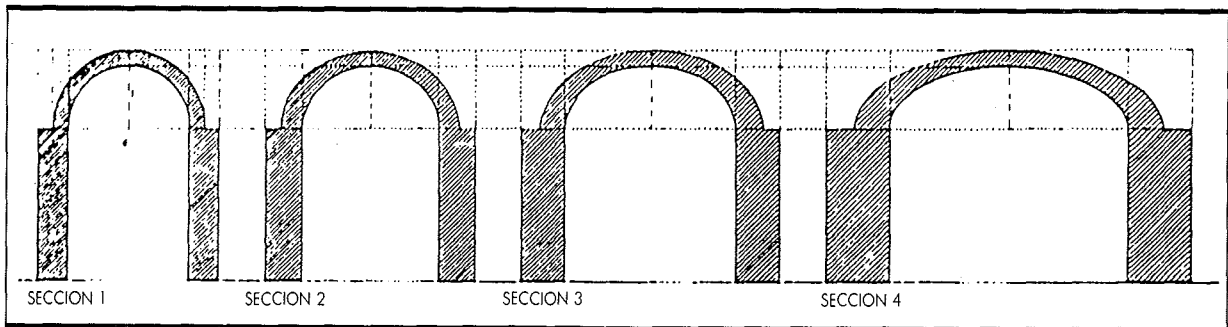


FIGURA 12.

éstas pueden hacerse más delgadas que los arcos. En el caso de una cúpula semiesférica de espesor constante Heyman (39) ha obtenido para la esbeltez de la cúpula, espesor/luz, un valor de  $1/47,6$  (40), es decir, que podemos hacer una cúpula aproximadamente 2,5 veces más fina de un arco semi-circular.

Es ventajoso hacer la cúpula apuntada y para una cúpula generada por revolución de un arco equilátero, el límite de esbeltez podría ser  $1/73$  (41).

Como en el caso de los arcos, para obtener un cierto grado de seguridad aplicamos un coeficiente geométrico de seguridad, típicamente comprendido entre 2 y 3.

Esta forma «válida» es independiente del tamaño y una cúpula de fábrica la mantiene —la forma procede de consideraciones de estabilidad— para un intervalo de dimensiones mayor que en el caso de los arcos. Si en el caso de los arcos hay algunos que están cerca del límite, las cúpulas de fábrica existentes, están muy lejos de este límite, como veremos más adelante.

**3.2. CARGAS PUNTUALES**

El efecto de cargas puntuales puede ser ignorado, porque la función de este tipo de estructuras como cubiertas, excluye la aparición de importantes cargas puntuales. Cuando aparecen, como en el caso de linternas pesadas, forman parte de las cargas muertas permanentes y deben ser consideradas desde el principio del estudio del equilibrio de la estructura.

La ecuación se deduce usando el análisis dimensional y se aplica a la influencia de cargas puntuales en arcos, y la carga crítica crece con el cubo de las dimensiones lineales. Esto es lo que ocurre por supuesto con las linternas.

**3.3. TEOREMA DE RANKINE**

El teorema de Rankine de la proyección paralela se aplica perfectamente al caso de cúpulas o cualquier estruc-

tura de fábrica. La aplicación práctica de este teorema al caso de cúpulas es incluso más útil debido al análisis mucho más complicado de las mismas.

Consideremos por ejemplo el caso de una cúpula de fábrica de forma elipsoidal con tres ejes principales diferentes. El estudio de la estabilidad y nivel de tensiones de este tipo de estructura llevaría consigo laboriosos y largos cálculos, explotaría los arcos generados por la cúpula en el momento del colapso y es completamente diferente para cada cuarto de la base.

Podemos obtener una respuesta inmediata aplicando una proyección paralela de la cúpula semiesférica estable, cuyas proporciones conocemos (véase más arriba) sólo multiplicando cada una de sus coordenadas  $x, y, z$  por el factor deseado para obtener una cúpula de las proporciones deseadas. Las variaciones de tensiones pueden ser obtenidas, otra vez, analíticamente usando la ecuación de Rankine o gráficamente para los puntos donde es esperado el valor más alto.

**3.4. LA CUPULA DE SAINT BIAGIO Y LA REGLA DE FONTANA**

Comenzamos este artículo con un comentario sobre la cúpula de San Biagio y una comparación con las cúpulas de San Pedro y Santa María dei Fiore. Hemos escogido la cúpula de San Biagio por dos razones: La primera porque es casi una fracción exacta,  $1/3$ , de las mayores cúpulas de fábrica y esto nos permite establecer una relación simple; la segunda es que corresponde aproximadamente a las proporciones de una regla geométrica que tuvo cierta difusión en la Italia del Renacimiento. La regla fue publicada por Carlo Fontana en su libro sobre San Pedro (42) y es reproducida en la figura 3-a.

Hemos realizado un análisis gráfico de la estabilidad

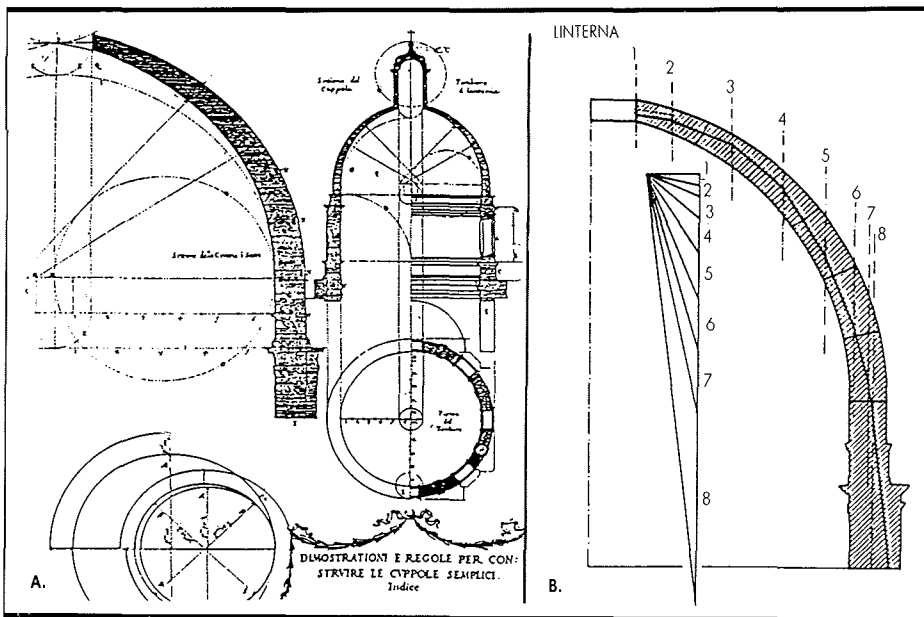


FIGURA 13. Estudio de estabilidad de la cúpula por Fontana.

de este tipo de cúpulas, basado en las hipótesis antes expuestas sobre el análisis último de este tipo de cúpulas (véase figura 13-b). Como puede verse, el diseño es muy satisfactorio por estar la línea de empuje siempre contenida en el tercio medio de la sección. Para las tensiones, una simple aplicación del análisis dimensional muestra que:

$$\sigma_{max} = \Phi (W_1, W_2, \dots) \mu l$$

donde  $\Phi$  es una función del factor de forma,  $\mu$  es el peso específico y  $l$  la dimensión lineal de la cúpula (podemos tomar por ejemplo la luz en la base de la cúpula).

El valor calculado de  $\Phi$  para una cúpula de esta forma es aproximadamente 1,28 (43). La correspondiente para Saint Biagio,  $l = 14$  m,  $\mu = 2\text{g/cm}^3$  es de  $0.34 \text{ MN/m}^2$ . Una cúpula similar tres veces mayor presentaría una  $\sigma_{max}$  de  $1.02 \text{ MN/m}^2$  que no es mucho, incluso para un ladrillo de mediana calidad. Ahora compararemos este valor con la  $\sigma_{max}$  actual en otras dos cúpulas con las cuales hemos hecho la comparación. Las proporciones de la cúpula de la figura 2-a serían alcanzadas para una luz de 370 m para una tensión admisible de  $3 \text{ MN/m}^2$ .

En el caso de San Pedro, siendo  $\mu$  igual, el valor de  $\Phi_{max}$  es, según la estimación de Gottgetreu (44), de  $1.06 \text{ MN/m}^2$ . El valor de  $\Phi$  es muy similar, 1.29. La posición de la línea de empujes no es tan favorable como en Saint Biagio —pasa a 1/5 del espesor en la base pero ello está tal vez compensado por la reducción de peso en la parte superior en razón de la doble cúpula (45).

Parsons (46) dio para Santa María dei Fiore un esfuerzo máximo de  $2.5 \text{ MN/m}^2$ , pero ello es para la hipótesis más desfavorable de suponer todo el peso concentrado en los nervios. Si suponemos el peso distribuido siguiendo la línea de empuje de la solución de la bóveda de aristas obtendremos un valor de  $1.02 \text{ MN/m}^2$ , siendo  $\Phi$  igual a 1.22. El inconveniente de usar la forma octogonal se compensa con la posición más favorable de la línea de empuje pasando claramente por el tercio central, y el uso de la doble cúpula.

El nivel de tensiones resultante de los análisis previos es siempre bastante moderado. Por supuesto los mayores esfuerzos no se encuentran en las cúpulas (elementos superficiales) sino en los pilares (elementos lineales), pero incluso en estos casos no se acerca a un nivel peligroso para una buena fábrica. Por ejemplo, en el pilar principal de San Pedro, tal vez el mayor edificio de fábrica, la tensión es de  $1.7 \text{ MN/m}^2$  (47).

Considerando que una buena fábrica puede presentar una tensión admisible de un orden de magnitud más alto,  $10\text{-}20 \text{ MN/m}^2$ , es un hecho que las cúpulas de fábrica y los edificios no se han acercado a sus tamaños límite (véase en tabla 2) una lista de las mayores cúpulas de fábrica). Por ejemplo, multiplicando las dimensiones de San Pedro por 3 obtendríamos un esfuerzo máximo en los pilares de  $5.1 \text{ MN/m}^2$  que no es exagerado; el

MAYORES CUPULAS DE FABRICA	LUZ (m)
PANTHEON (ROMA SIGLO II)	43
SANTA SOFIA (ESTAMBUL SIGLO VII)	33
SANTA MARIA DE FIORE (FLORENCIA SIGLO XVII)	42
SAN PEDRO (ROMA SIGLO XVI)	42
GOL GOMUZ (BIJAPUR, INDIA SIGLO XVII)	42
SAN PABLO (LONDRES SIGLO XVIII)	33
SAN FRANCISCO EL GRANDE (MADRID SIGLO XVIII)	33
IGLESIA DE MOSTA (MOSTA, MALTA, SIGLO XIX)	38
SAN CARLOS (MILAN SIGLO XIX)	32

TABLA 2.

problema sería el volumen total de la fábrica resultante; es un problema de escala humana y no de prestaciones del material (48, 49).

#### 4. CONCLUSIONES SOBRE LA VALIDEZ DE LAS REGLAS TRADICIONALES SOBRE DIMENSIONES

La estabilidad de estructuras de fábrica sometidas preferentemente a su propio peso impone ciertas dimensiones globales y, de hecho, cierta forma geométrica. Esta forma supone, desde un punto de vista elástico, un sobredimensionamiento de la estructura. Como consecuencia el nivel de tensiones en estructuras de fábrica de tamaños tradicionales (es decir, de luces menores de 60 m) es bajo y la condición de estabilidad es más restrictiva.

Esto conduce a ciertas «formas válidas» para arcos de fábrica, bóvedas y cúpulas —de hecho incluso para edificios—. Las reglas geométricas tradicionales proporcionan un medio para fijar unas dimensiones seguras en estructuras de fábrica y son consecuentemente una forma racional y válida para el diseño de estructuras de fábrica, dentro del rango de dimensiones normal citado más arriba. Estas consideraciones han sido expresadas varias veces por Heyman (50), pero han merecido poca atención de los historiadores de la arquitectura e ingeniería civil.

De hecho, este acercamiento justifica el enorme éxito de los maestros de obra tradicionales, que consiste, como ha establecido Gordon, en que «la naturaleza del problema del diseño de edificios grandes de fábrica se adapta de forma peculiar a las limitaciones de la mentalidad pre-científica» (51). La posibilidad de utilizar reglas geométricas, de confiar en modelos y sobre todo, el uso de edificios anteriores como modelos a escala natural, ha jugado indudablemente un papel esencial. Ello permite explicar el impresionante éxito de estructuras

tales como el Pantheon y Santa Sofia, casi doblando en tamaño cualquier estructura jamás construída con anterioridad.

Junto a esto, la posibilidad de hacer un «chequeo» visual de la estabilidad de un arco o cúpula no puede subestimarse, sobre todo en una profesión donde el dibujo es la manera más importante de expresión y transmisión de conocimientos (52). De hecho la mayor parte de los dibujos de arcos y cúpulas que se han encontrado en antiguos tratadistas representan «buenas formas».

Hoy día las estructuras de fábrica no tienen gran difusión y en cualquier caso, las vigas y celosías, han reemplazado a los arcos en casi todos los casos. Sin embargo, hay dos campos, junto al campo histórico, arriba mencionado, donde las observaciones anteriores son pertinentes. Estos son: la restauración de antiguas construcciones de fábrica y el problema de edificios en el Tercer Mundo. En este último caso, tal vez las reglas geométricas y de dimensiones de fábricas podrán entenderse fácilmente y aplicarse por obreros no especializados (junto a ser fábrica el material más barato).

#### REFERENCIAS

1. HUERTA FERNANDEZ, S. «Structural design of arches, vaults and domes in Spain: 1500-1800». Doctoral Dissertation in progress under the direction of Professor R. Aroca Hernández-Ros.
2. GALILEO GALILEI: *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche* intorno à due nuove scienze. Leiden: 1688, pp. 233 y ss.
3. The general attitude of engineering historians pointed to the impossibility of deducing valid rules due to the ignorance of the science of static. See: Parsons, W.P. *Engineers and Engineering in the Renaissance*. Cambridge, The MIT Press, 1965 (reprint of 1939 edition), p. 481; Mainstone, R. J. *Developments on Structural Form*, Harmondsworth, Penguin, 1983, p. 284; Dorn, H. I. *The Art of Building and the Science of Mechanics: An Study of the Union of Theory and Practice in the Early History of Structural Analysis in England*. Ph. D. Princeton University, 1970, pp. 50-51; Benvenuto, E. *La Scienze della Costruzione ed il suo sviluppo storico*. Firenze, Sansoni, 1982, pp. 234-235.
4. The dimensions and form from the cited domes has been taken from Durm, J. *Die Baukunst der Renaissance in Italien*, Leipzig, 1914.
5. See: Barr, A. *Address on the Application of the Science of Mechanics to Engineering Science*. London: The Institution of Civil Engineers, 1899, from which figure. 3 has been taken, p. 11.
6. After Galileo, Borelli. *De Motu Animalium*, 1685, applied the same approach to demonstrate that a man would never be able to fly and to explain why small animals leap higher. See: Trompson, D'Arcy Wentworth. Galileo and the principle of Similitude. *Nature*, vol. 95, 1915, pp. 426-427. Isaac Newton in his *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687, Book II, Section VII, Prop. XXXII, Theorem XXVI, applied the principle for the first time to a dynamical problem, the movement of two similar bodies. See: Greenhill, G. *Mechanical Similitude*. *Mathematical Gazette*, vol. 8, 1916, pp. 229-233.
7. PALACIOS, J. *Análisis Dimensional*, Madrid, 1964, pp. 9-17.
8. Lord Rayleigh *Nature*, vol. 95, 1915, pp. 202-203.
9. *Nature*, vol. 95, 1915, pp. 202-203.
10. THOMSON, J. J. *Comparisons of Similar Structures as to Elasticity, Strength, and Stability*. Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders of Scotland, 1875.
11. BARR, A. *Address on the Application...*, op. cit. above, and Barr, A. *Comparisons of Similar Structures and Machines*. Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders of Scotland, vol. 42, 1899, p. 322 and ff. We have not been able to consult this last work.
12. The basic correctness of the traditional structural formulae in respect to the principles of plastic design of masonry structures has been mentioned several times by J. Heyman. See for example: Beauvais Cathedral. Transactions of the Newcomen Society, vol. 40, 1967/68, pp. 15-35; On the Rubber Vaults of the Middle Ages. *Gazette des Beaux-Arts*, vol. 71, 1968, pp. 177-188. See also: Gordon, J. E. *Structures* (Harmondsworth, 1977), Chap. 9, «Walls, arches and dams», pp. 171-197.
13. This is the first, or "lower bound", theorem, or limit analysis applied to arches. See: Kooharian, A. *Limit Analysis of Voussoir Segmental Arches*. Proceedings of the American Concrete Institute, vol. 49; Heyman, J. *The Safety of Masonry Arches*. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 11, 1969, pp. 363-385; and Parland, H. *Basic principles of the structural mechanics of masonry: a historical review*. *International Journal of Masonry Construction*, vol. 2, núm. 2, 1982, pp. 48-58.
14. See: Heyman, J. *The Masonry Arch*. Chichester, 1982.
15. The calculations are made under the following assumptions: a) the line of thrust does not suffer a significative deviation due to the increasing of the thickness; b) the diagram of stresses forms a rectangle due to the plastification of the material.
16. For an inventory of all the great vaults over 40 m of span, see: Sejourné, P. *Grandes Voûtes*. Bourges, 1913-1916, 6 vols.
17. See for example, Kubler, G. *A late gothic computation of rib vault thrusts*. *Gazette des Beaux-Arts*, vol. 26, 1944, pp. 434-439, and Shelby, L. and Mark, R. *Late gothic structural design in the Instructions of Lorenz Lechler*. *Architectura*, vol. 9, 1979, pp. 113-131.
18. We have followed the method given in J. Palacios, *Análisis Dimensional*, Madrid, 1964, pp. 78 and ff. and 113-114.
19. Heyman has obtained the value of the  $\Phi$  function for the case of the point load P placed at a quarter of the span. See: Heyman, J. *The estimation of the strength of masonry arches*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, vol. 69, 1980, pp. 921-937, and *The Masonry Arch*. Chichester, U.K., Ellis Horwood, 1982, pp. 72-78.
20. See: Croizette-Desnoyers, Ph. *Cours de Construction des Ponts*. Paris, Dunod, 1885, vol. 2, pp. 1-30; Dupuit, J. *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Paris, Dunod, 1870, pp. 169-197. For an "elastic interpretation" see: Davidesco, M. *Examen critique des formules employées pour déterminer l'épaisseur a la clef des voûtes en maçonnerie*. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906, pp. 247-253.
21. MARTINEZ DE ARANDA, G. *Cerramientos y trazas de monea*. Ms. Biblioteca del Servicio Histórico Militar, Madrid. (Undated, approximately end of XVIth century.) Fac. edition Madrid, CEHOPU, 1986.

22. STRAUB, H. A History of Civil Engineering. London, Leonard Hill, 1952, p. 90.
23. PERRONET, J. R. Mémoire sur la recherche que l'on pourroit employer pour construire de grandes Arches de pierre ... Paris, Imprimerie Nationale, 1973.
24. SEJOURNE, P. Quelques réflexions pratiques sur les voûtes a grande portée. Annales des Ponts et Chaussées, 1886, pp. 497-502.
25. FREYSSINET, E. Perfectionnement dans la construction des grandes voûtes. Le Génie Civil, vol. 58, 1921, pp. 97-102, 124-128, 146-150; and Les Ponts en béton armé de très grande portée. Mémoires de la Société des Ingenieurs Civiles de France, 1930, pp. 376-379.
26. The information has been taken, chiefly from Sejourné, P. Grandes Voûtes, op. cit. above.
27. STÜSSI, F. Leonardo da Vincis Entwurf einer Brücke über das Goldene Horn. Schweizerische Bauzeitung, vol. 71, 1953, pp. 113-116.
28. See: Freyssinet, op. cit. above and Fernández Ordóñez, F. Eugene Freyssinet. Barcelona, 2C Ediciones, 1978, pp. 377-378.
29. BAXTER, J. W.; GEE, A. F., y JAMES, H. B. Gladesville Bridge. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, vol. 30, 1965, pp. 489-530.
30. See: Rankine, W.J.M. Applied mechanics. Glasgow, 1864, Chapter IV, Parallel projections in static.
31. *Ibidem*.
32. See: Timoshenko, S.P. History of Strength of Materials. New York, Dover, 1983 (reprint of 1953 ed.), pp. 197-208, and Charlton, T.M. A History of the Theory of Structures in the Nineteenth Century. Cambridge, U.K., Cambridge University Press, 1982, pp. 58-66, 73-93.
33. The only limit to this arise from the dependence of the form of the line of thrust on the family of section planes. A good exposition of this dependence is in: Dupuit, J. Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie. Paris, Dunod, 1870. For the complete mathematical theory of thrust lines see: Milankovith, M. Theorie der Drückkurven. Zeitschrift für Mathematik und Physik, vol. 55, 1907, pp. 1-27.
34. Manual of Applied Mechanics, op. cit., paragraph 235-A.
35. Although well known since antiquity, this hypothesis was employed for the first time to estimate the stability of the dome of Saint Peter in the two studies make by experts called by the Pope: Le Seur, T. Jacquier, F.; Boscovich, R. G. Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro. Roma, 1743, and Poleni, G. Memorie storiche della Grand Cupola del Tempio Vaticano. Padova, 1748. After that it constituted the standard method of analysis throughout the XIX century.
36. See: Heyman, J. On Shell Solutions of Masonry Domes. International Journal of Solids and Structures, vol. 3, 1967, pp. 227-241, and Heyman, J. Equilibrium of Shell Structures. Oxford, U.K., Oxford University Press, 1977, pp. 106-116.
37. Dunn, W. The Principles of Dome Construction. Architectural Review, vol. 23, 1908, pp. 63-73 and 108-112.
38. This practice seems to have been used also in roman times. Sometimes these arches does not even reach the top of the dome. See: Torres Balbás, L. Bóvedas romanas sobre arcos de resalto. Archivo Español de Arqueología, vol. 64, 1946, pp. 173-28.
39. HEYMAN, J. Equilibrium of Shell Structures. Op. cit. above.
40. This value almost coincides with the value of 1/43.4 calculated by Sir Edmund Beckett, who has been, as far as we know, to study the limit proportions of domes in his article: On the Mathematical Theory of Domes. Memoirs of the Royal Institute of British Architects, 1871 feb., pp. 81-115. A summary, made by the same author, of the most important results appear in the article "Dome" in the Encyclopaedia Britannica, 9th ed., Edinburgh, U.K., 1875-1888, vol. VII, pp. 347-348.
41. Sir Edmund Beckett, op. cit. above.
42. Fontana, C. Il Tempio Vaticano e sua origine. Roma, 1694. Cap. XXIV, Regole per le Cupole Semplici..., pp. 361-367.
43. The value of  $\Phi$  for a hemi-spherical dome is 1. The pointed form makes the global volume greater and tensions rise. However as we have seen the form is more stable.
44. The calculation has been made taking as a point of departure the investigation made by Gottgetreu. He was concerned only with the position of the line of thrust. Knowing it, the above mentioned stress is matter of a simple arithmetical operation involving the total weight of the dome and its surface at the base. See: Gottgetreu, R. Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen, vol. I, pp. 254-260, Tafel. XXIX, "Stabilitätsuntersuchung der Peterskuppel zu Rom".
45. Surprisingly the analysis made by Durand-Claye of the dome projected by Bramante, which is massive and inspired in that of the Pantheon gave a  $\sigma_{max}$  of 0.88 MN/m<sup>2</sup>, with  $\sigma = 1.07$ . See: Durand-Claye, A. Vérification de la Stabilité des voûtes et des arcs. Application aux voûtes sphériques. Annales des Ponts et Chaussées, 1880, pp. 416-440, planches, 14-16.
46. PARSONS, W. B. Engineers and Engineering in the Renaissance. Cambridge, Mass., The MIT Press, 1976 (reprint of 1939 ed.), pp. 587-600.
47. Navier, L.M.N.H. Résumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Applications de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines. Bruselas, 1839, p. 102.
48. The actual volume of Saint Peter is of 107.988 m<sup>3</sup>. A lineal increase of the dimensions by three will multiply this by 27 and that will make 2,915.676 m<sup>3</sup>, which is more than the volume of Cheops' pyramid (2,592,100 m<sup>3</sup>). Saint Peter's volume after the measures and calculations made by Fontana (see op. cit. above); Cheops' pyramid volume from its overall dimensions.
49. Mäkelt. Des Bau gro er gemauerten Kuppelgewölbe. Zentralblatt der Bauverwaltung, vol. 62, 1942, pp. 409-417, proposes the construction of a dome of 100 m of span made of brickwork.
50. See note 12 above.
51. See note 12 above. The citation from op. cit., p. 171.
52. Ferguson has shown the importance of drawings on the transmission of old machines design. See: Ferguson, E. S. The Mind's Eye: Non-verbal Thought in Technology. Science, vol. 197, 1977, pp. 827-836.